SUR LES OPÉRATIONS LINÉAIRES*

PAR

MAURICE FRÉCHET

I. Rappelons d'abord quelques définitions. Nous dirons qu'une *opération* est définie si l'on fait correspondre un nombre réel déterminé et fini U_f à toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre deux nombres fixes a, b. Nous appellerons avec M. HADAMARD *opération linéaire* toute opération qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° elle est *distributive*, c'est à dire que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues entre a et b, on a toujours :

$$(1) \qquad U_{f_1+f_2} = U_{f_1} + U_{f_2}.$$

2° elle est *continue*, c'est à dire que U_{f_1} tend vers U_{f_2} lorsque la fonction f_1 tend *uniformément* vers f_2 entre a et b.

M. HADAMARD a démontré † en se basant sur l'étude de l'expression :

$$(2) \qquad \lim_{\mu=\infty} \int_a^b f(u)\, \mu e^{-\mu^2(u-x)^2}\, du,$$

que toute opération linéaire peut être représentée sous la forme :

$$(3) \qquad U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) K_n(x)\, dx,$$

où $K_n(x)$ est une fonction *continue* de x entre a et b.

Je me propose de donner ici une nouvelle démonstration de cet important théorème, démonstration qui me permettra d'établir simultanément un développement en série très général de U_f. Je présenterai ensuite quelques remarques sur l'expression (3).

Développements en séries d'opérations linéaires canoniques.

II. Il est assez naturel de chercher à établir pour les opérations linéaires un développement analogue à celui de Taylor pour les fonctions ordinaires. Il s'agirait de trouver une suite d'opérations linéaires simples : $U_f^{(0)}, \cdots, U_f^{(n)}, \cdots$ choisies une fois pour toutes et telles que toute opération linéaire U_f puisse s'écrire sous la forme :

* Presented to the Society at the St. Louis meeting, September 17, 1904. Received for publication June 24, 1904.

† Comptes Rendus : *Sur les opérations fonctionnelles,* 9 Février, 1903.

(4) $$U_f = u_0 U_f^{(0)} + u_1 U_f^{(1)} + \cdots + u_n U_f^{(n)} + \cdots,$$

les constantes $u_0, u_1, \cdots$ variant seules avec l'opération U_f.

M. PINCHERLE a déja montré que l'on pouvait écrire:

(5) $$U_f = u_0 f(c) + u_1 f'_c + \cdots + u_n f_c^{(n)} + \cdots,$$

c étant un nombre fixe compris entre a et b, en prenant:

$$u_0 = U_1, \; u_1 = U_{(x-c)}, \cdots, \; u_n = \frac{1}{n!} U_{(x-c)^n}, \cdots.$$

Mais un tel développement ne peut *s'écrire* que si $f(x)$ est dérivable indéfiniment en $x = c$ et encore* cela ne suffit pas pour assurer la convergence du développement vers U_f.

Représentation par une série convergente de toute opération linéaire portant sur une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet.

III. Je vais montrer d'abord qu'on peut obtenir un développement de la forme (4) ayant un champ de validité beaucoup plus étendu que le développement (5) puisqu'il n'exige même pas que $f(x)$ soit dérivable.

Pour cela, observons que l'on peut toujours supposer avoir remplacé l'intervalle (a, b) par l'intervalle $(0, \pi)$. Ne considérons pour le moment que les fonctions $f(x)$ continues dans $(0, \pi)$ et n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima dans cet intervalle. Si l'on développe en série de Fourier la fonction (satisfaisant aux conditions de Dirichlet) qui est égale à $f(x)$ entre 0 et π et à $f(-x)$ entre 0 et $-\pi$, on aura entre 0 et π:

(6) $$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots,$$

avec

(7) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

IV. Puisque la série (6) converge *uniformément* dans $(0, \pi)$, on peut lui appliquer *terme à terme* toute opération linéaire U_f et l'on aura:

(8) $$U_f = \frac{\pi}{2}(2a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + \cdots),$$

en posant cette fois:

(9) $$u_0 = \frac{1}{\pi} U_1, \; u_1 = \frac{2}{\pi} U_{\cos x}, \cdots, \; u_n = \frac{2}{\pi} U_{\cos nx}, \cdots.$$

Ce développement est bien de la forme (4), car les formules (7) montrent que les

* D'ailleurs, M. PINCHERLE ne s'occupant que d'opérations portant sur des fonctions analytiques, la remarque a, dans ce cas, beaucoup moins de portée. Voir *Le operazioni distributive* par S. PINCHERLE et U. AMALDI, 1901, Bologne.

quantités $a_0, a_1, \cdots$, peuvent être considérées comme des opérations linéaires déterminées une fois pour toutes :

$$(10) \qquad U_f^{(0)} = \int_0^\pi f(x)\,dx, \;\cdots,\; U_f^{(n)} = \int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx, \;\cdots.$$

Ainsi, *nous sommes parvenus à un développement de la forme* (4), moyennant les formules (9) et (10), *développement qui est valable pour toutes les fonctions continues ayant un nombre limité de maxima et de minima entre* 0 *et* π.

Représentation par une série simplement indéterminée de toute opération linéaire portant sur une fonction continue quelconque.

V. On peut même s'arranger pour supprimer la dernière condition en généralisant convenablement la notion de limite. Pour cela, nous appellerons, avec M. Cesaro, *limite généralisée* d'une suite de nombres $u_0, u_1, u_2, \cdots$, la limite, si elle existe, de la suite,

$$\frac{u_0 + u_1}{1}, \; \frac{u_0 + u_1 + u_2}{2}, \; \cdots, \; \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n}, \; \cdots.$$

Nous dirons qu'une série est *simplement indéterminée* si la somme de ses n premiers termes a une limite généralisée qui sera par définition la *somme généralisée* de la série. Pour une telle série :

$$v_0, \; v_1, \; \cdots, \; v_n, \; \cdots,$$

de somme généralisée σ, nous écrirons :

$$\sigma \doteq v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots,$$

ou :

$$\sigma \doteq \lim_{n=\infty} \text{gén}\, S_n,$$

en posant

$$S_n = v_0 + \cdots + v_n,$$

ou :

$$\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n$$

avec :

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n} = \frac{nv_0 + (n-1)v_1 + \cdots + v_n}{n}.$$

On sait, d'ailleurs, que si une série est convergente, elle a une somme généralisée égale à sa somme au sens ordinaire.

Or, M. Fejer a démontré* que toute fonction périodique continue peut être représentée par la somme généralisée de son développement de Fourier, avec une convergence uniforme.

*Mathematische Annalen, Band 58 (1903), Heft 1, 2.

Par suite, *le développement* (8) *est valable pour toute fonction* $f(x)$ *continue entre* 0 *et* π *pourvu qu'on remplace la somme de la serie par sa somme généralisée.*

On aura ainsi:

(6)′ $$f(x) \doteq a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots,$$

(4)′ $$U_f \doteq u_0 U_f^{(0)} + \cdots + u_n U_f^{(n)} + \cdots,$$

avec les formules (7), (9) et (10).

Le théorème de M. Hadamard.

VI. Quelle que soit la fonction continue $f(x)$, les égalités (6)′ et (4)′ pourront s'écrire:

(11) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(y)\sigma_n(xy)\,dy,$$

(12) $$U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(y) K_n(y)\,dy,$$

en posant:

(13) $$\sigma_n(x, y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}n + (n-1)\cos y \cos x + \cdots + \cos ny \cos nx}{n}\right),$$

(14) $$K_n(y) = \frac{nu_0 + (n-1)u_1 \cos y + \cdots + u_n \cos ny}{n}.$$

La fonction $K_n(y)$ est évidemment continue. Par suite, *le théorème de M. Hadamard résulte des formules* (12) et (14). Car il suffit d'y effectuer la substitution: $y = a + (b - a)z/\pi$ pour revenir au cas d'un intervalle quelconque (a, b).

Remarques sur les modes de représentation précédents.

VII. Les fonctions $K_n(y)$ sont bien déterminées par l'opération U_f, car on a:

(15) $$K_n(y) = U_{\sigma_n(x,y)},$$

en considérant dans $\sigma_n(x, y)$ la variable y comme un paramètre arbitraire.

M. Hadamard (loc. cit.) a fait observer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'opération U_f se présente sous la forme:

(16) $$U_f = \int_0^\pi f(y) H(y)\,dy$$

où $H(y)$ est une fonction continue, est que les fonctions K_n convergent uniformément vers une fonction limite. Je ferai remarquer que la méthode actuelle permet de formuler cette condition d'une manière assez simple si l'on part de l'expression (4)′. En effet, les fonctions $K_n(y)$ représentent la quantité dont on

doit chercher la limite ordinaire pour obtenir, lorsqu'elle existe, la somme généralisée de la série de Fourier :

$$(17)\qquad K(y):\quad u_0 + u_1 \cos y + \cdots + u_n \cos ny + \cdots.$$

Par conséquent, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une opération linéaire* U_f *puisse être mise sous la forme intégrale (16) est que les coefficients* $u_0, u_1, \cdots$ *de son développement en série:* (8)', *soient les coefficients du développement en serie de Fourier (17) d'une fonction continue.*

VIII. Le théorème de M. HADAMARD conduit naturellement à étudier le problème suivant : puisque toute opération linéaire peut s'exprimer sous la forme:

$$(18)\qquad U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(y) H_n(y)\, dy,$$

$H_n(y)$ étant une fonction continue, à quelles conditions le second membre pourra-t-il définir une opération linéaire si l'on se donne a priori une suite quelconque de fonctions continues $H_n(y)$?

Il est évidemment suffisant que les fonctions H_n tendent uniformément vers une fonction limite nécessairement continue $H(y)$. Mais cela n'est pas nécessaire; *ce n'est même pas nécessaire pour que l'expression :*

$$(19)\qquad V_f^{(n)} = \int_0^\pi f(y) H_n(y)\, dy,$$

ait pour limite une opération linéaire de la forme:

$$(16)\qquad \int_0^\pi f(y) H(y)\, dy,$$

où $H(y)$ est continue.

En effet, nous allons montrer que l'on peut construire une suite de fonctions continues $H_n(y)$ ayant pour limite une fonction $K(y)$ dont l'ensemble des discontinuités a la puissance du continu et telles cependant que l'opération $V_f^{(n)}$ ait pour limite une opération de la forme (16) où $H(y)$ est continue.

En effet, supposons formée la suite des fonctions H_n de façon que la limite $K(y)$ ne diffère d'une certaine fonction continue $H(y)$ qu'en tous les points d'un ensemble de mesure nulle E, les fonctions H_n et K restant bornées dans leur ensemble. On sait dans ce cas que les fonctions $H_n f$ auront pour limite une fonction Kf mesurable * et que l'intégrale $\int_0^\pi H_n f dy$ aura pour limite † l'intégrale au sens de M. LEBESGUE $\int_0^\pi Kf dy$. Or, on aura : ‡

* *Leçons sur l'intégration* par H. LEBESGUE, p. 111, Gauthier Villars, Paris, 1904.

† Loc. cit., p. 114.

‡ Loc. cit., p. 116.

$$\int_0^\pi Kf\,dy - \int_0^\pi Hf\,dy = \int_E (K-H)f\,dy = 0\,,$$

puisque E est de mesure nulle et que la fonction $(K-H)f$ est bornée. On a donc bien :

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi H_n f\,dy = \int_0^\pi Hf\,dy,$$

H étant continue.

Pour former la suite des fonctions H_n, il suffit de prendre pour E, un ensemble parfait, non dense et de mesure nulle comme celui qui a été défini par M. CANTOR.* Un tel ensemble, qui a la puissance du continu, s'obtient en enlevant du segment $(0, \pi)$ tous les points intérieurs au sens étroit à certains intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n), \cdots$.

Posons alors :

$$a_p^{(n)} = a_p + \frac{b_p - a_p}{n-p+3}, \qquad b_p^{(n)} = b_p - \frac{b_p - a_p}{n-p+3} \qquad (n \geqq p).$$

L'intervalle $(a_p^{(n)}, b_p^{(n)})$ est complétement intérieur à l'intervalle (a_p, b_p) et les points $a_p^{(n)}$, $b_p^{(n)}$ tendent respectivement vers a_p, b_p lorsque p restant fixe, n croit indéfiniment.

Il est alors facile de voir qu'on arrivera au but indiqué en prenant $H_n(y) = H(y)$ dans les intervalles : $(a_1^{(n)}, b_1^{(n)}), \cdots, (a_n^{(n)}, b_n^{(n)})$, puis $H_n(y) = R(y)$ en dehors des intervalles $(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)$, $R(y)$ étant une fonction quelconque déterminée et bornée dans $(0, \pi)$, enfin en prenant pour $H_n(y)$ une fonction linéaire dans les intervalles restants où on connait les valeurs de H_n aux extrémités. Si $R(y) - H(y)$ ne s'annule en aucun point de E, ce qu'on peut toujours supposer, tous les points de E seront des points de discontinuité de $K(y)$.

IX. Ce qui précède montre en outre l'utilité qu'il y a à ne pas rejeter comme trop artificielles des opérations qui seraient définies par une expression telle que :

$$(20) \qquad \int_0^\pi f(y) K(y)\,dy,$$

où K serait une fonction non continue, même pas intégrable au sens de RIEMANN, mais intégrable au sens plus large de M. LEBESGUE (comme la fonction qui est égale à 1 en tous les points d'abscisses irrationnelles et à 2 en tous les autres points). Car on s'exposerait à rejeter en même temps (comme dans l'exemple précédent) des opérations linéaires très simples et très naturelles. Nous sommes donc conduits à poser un problème un peu plus précis que le précédent

* Voir par exemple *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, page 12, par É. BOREL, Gauthier Villars, Paris, 1904.

(§ VIII). Dans quel cas l'opération (19) a-t-elle pour limite une opération de la forme (20), où la fonction $K(y)$ est la fonction la plus générale qui puisse donner un sens * à cette expression, c'est-à-dire une fonction mesurable? Comme nous l'avons vu, il suffit pour cela que les fonction H_n soient bornées dans leur ensemble et tendent (de façon quelconque) vers une fonction limite. Mais, ici encore, cela n'est pas nécessaire car toute fonction limite de fonctions continues est de première classe (au sens de M. BAIRE), tandis que $K(y)$ peut être mesurable sans être de première classe. †

X. Quoiqu'il en soit, nous allons montrer (après ces exemples de conditions suffisantes) que l'on peut donner à la première question que nous avons posée une réponse partielle présentant un criterium d'une assez grande simplicité.

Je dis que *si l'expression :*

$$V_f^{(n)} = \int_0^\pi H_n(y) f(y)\, dy,$$

où les H_n sont des fonctions continues quelconques, a pour limite une opération linéaire U_f, quand n croit indéfiniment, les développements de Fourier des fonctions $H_n(y)$ ont un développement limite.

Autrement dit, si l'on écrit, comme on en a le droit:

$$H_n(y) \doteq u_0^{(n)} + u_1^{(n)} \cos y + \cdots + u_p^{(n)} \cos py + \cdots$$

la suite:

$$u_p^{(1)},\ u_p^{(2)},\ \cdots,\ u_p^{(n)},\ \cdots,$$

a toujours une limite u_p quel que soit p.

Il suffit d'observer que, par hypothèse, l'expression $V_f^{(n)}$ a une limite bien déterminée U_f pour toute fonction $f(y)$ continue entre 0 et π. Le théorème s'obtient alors immédiatement en appliquant cette condition aux fonctions

$$f(y) = \frac{1}{\pi},\ f(y) = \frac{2\cos y}{\pi},\ \cdots,\ f(y) = \frac{2\cos py}{\pi},\ \cdots.$$

Si le développement limite:

$$u_0 + u_1 \cos y + \cdots + u_n \cos ny + \cdots,$$

constitue une série simplement indéterminée et représente une fonction continue $K(y)$, la condition sera suffisante. Mais dans le cas général, nous n'en savons rien. Je me propose d'étudier cette question dans une seconde note.

PARIS, *Juin* 1904.

---

* Voir LEBESGUE, loc. cit., page 98.

† Voir LEBESGUE, loc. cit., page 112.